7 класс

Задача 7.1. Карлсон летит к бабушке.

Как-то летом Карлсон полетел навестить свою бабушку. Первую половину своего пути он пролетел со скоростью 30 км/ч. Затем Карлсон устал и сел перекусить. Хорошенько подкрепившись, он полетел дальше и преодолел остаток пути со скоростью 750 м/мин. Какую долю от времени своего путешествия Карлсон перекусывал, если его средняя скорость на всём пути составила 7,5 м/с?

Ответ: 1/4.

Решение: Пусть s — весь путь, пройденный Карлсоном. Разобьём всё путешествие на три участка: на первом он пролетел путь $s/2$ со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, на втором он перекусывал в течение времени t_2, на третьем он пролетел ещё раз путь $s/2$ со скоростью $v_3 = 750$ м/мин $= 45$ км/ч. Полное время путешествия Карлсона равно $t = s/v_{\text{сред}}$, где $v_{\text{сред}} = 7{,}5$ м/с $= 27$ км/ч. Время, потраченное им на первый и третий участки — $t_1 = s/(2v_1)$ и $t_3 = s/(2v_3)$, соответственно. Отсюда находим, что

$$t_2 = t - t_1 - t_3 = t - \frac{s}{2v_1} - \frac{s}{2v_3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t_2}{t} = 1 - \frac{s}{2v_1 t} - \frac{s}{2v_3 t} = 1 - \frac{v_{\text{сред}}}{2v_1} - \frac{v_{\text{сред}}}{2v_3} = 1 - 0{,}45 - 0{,}3 = 0{,}25.$$

Критерии:

Правильное приведение всех скоростей к одним единицам измерения . . . . 1 балл
Записано выражение для t_1, t_3 . . . . 2 балла
Записано выражение для t . . . . 2 балла
Записано выражение для t_2 . . . . 2 балла
Найдено отношение t_2/t . . . . 3 балла

Задача 7.2. О длине поезда.

Пассажирский поезд, движущийся с постоянной скоростью v, проезжает туннель длины L за то же самое время, что этот же поезд проезжает мимо движущегося навстречу ему со скоростью $3v$ товарного состава, имеющего длину $6L$. Чему равна длина пассажирского поезда?

Ответ: $2L/3$.

Решение: Пусть l — длина пассажирского поезда. Путь, который должен пройти этот поезд, чтобы полностью выехать из туннеля, равен $l + L$. Время, которое он на это потратит, равно $t_1 = (l + L)/v$. Аналогично получаем, что путь, который должен пройти пассажирский поезд, чтобы полностью разъехаться с товарным составом, равен $l+6L$. Так как скорость их сближения равна $v+3v = 4v$, время разъезда поездов — $t_2 = (l+6L)/(4v)$. Приравнивая времена t_1 и t_2, находим, что

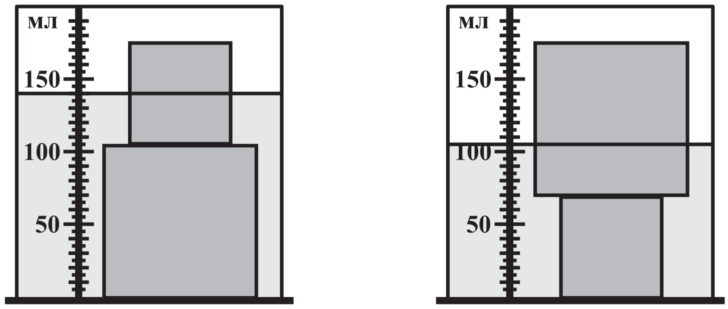
$$\frac{l+L}{v} = \frac{l+6L}{4v} \quad \Rightarrow \quad 4l + 4L = l + 6L \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2L}{3}.$$

Критерии:

Найден путь, пройденный пассажирским поездом при проезде туннеля . . . . 2 балла
Найден путь, пройденный пассажирским поездом при разъезде с товарным составом . . . . 2 балла
Найдена скорость сближения поездов . . . . 2 балла
Найдено время проезда туннеля и время проезда мимо товарного поезда . . . . 2 балла
Найдена длина пассажирского поезда . . . . 2 балла

Задача 7.3. Кубики в мерном сосуде.

В мерный сосуд с водой помещают два кубика, большой и маленький. Если большой кубик находится внизу, то маленький кубик, располагаясь на нём, погружается в воду наполовину (см. рис. 7.1а). Если же большой кубик находится сверху, то он оказывается погружен в воду на треть своего объёма (см. рис. 7.1б). Определите с помощью этих рисунков объёмы обоих кубиков. Стенки мерного сосуда вертикальны, количество воды в нём в обоих случаях одно и то же.



а б

Рис. 7.1.

Ответ: Объём маленького кубика равен 20 см^3, объём большого — 67,5 см^3.

Решение: Сначала найдём отношение сторон большого и маленького кубиков. Для этого воспользуемся шкалой, нарисованной на сосуде. Высота маленького кубика соответствует 70 мл по мерной шкале, а высота большого кубика — 105 мл. Отсюда получаем, что длина стороны большого кубика в 1,5 раза больше длины стороны маленького.

Пусть a — длина ребра маленького кубика. Тогда его объём равен $V_1 = a^3$, а объём большого — $V_2 = (1{,}5a)^3 = 3{,}375a^3$. Суммарный объём, погруженный в воду на рис. 7.1а, составляет $V_2 + V_1/2 = 3{,}875a^3$. Во втором случае (рис. 7.1б) погруженный объём равен $V_1 + V_2/3 = 2{,}125a^3$. Так как разность между этими объёмами должна равняться 140 мл − 105 мл = 35 мл, получаем

$$3{,}875a^3 - 2{,}125a^3 = 35\text{ мл} \quad\Rightarrow\quad 1{,}75a^3 = 35\text{ мл} \quad\Rightarrow\quad a^3 = \frac{35\text{ мл}}{1{,}75} = 20\text{ мл} = 20\text{ см}^3.$$

Исходя из этого, находим объёмы кубиков: $V_1 = a^3 = 20$ см^3, $V_2 = 3{,}375a^3 = 67{,}5$ см^3.

Критерии:

Найдено отношение сторон кубиков . . . . 2 балла
Найдено отношение объёмов кубиков . . . . 1 балл
Записано уравнение для разности погруженных объёмов . . . . 3 балла
Найден объём маленького кубика . . . . 2 балла
Найден объём большого кубика . . . . 2 балла

Задача 7.4. Гонки!

Смешарики Крош и Бараш решили устроить велосипедные гонки. Для этого они нашли в лесу длинную тропинку, обозначили на ней место старта и финиша, а Лосяша попросили стать судьёй. Получив команду на старт, Бараш поехал к финишу с постоянной скоростью 21 км/ч. Крош же вначале решил дать фору Барашу и первую треть пути двигался со скоростью 18 км/ч, затем увеличил свою скорость до 27 км/ч, но в конце пути устал, снизил её до 20 км/ч и, как результат, проиграл Барашу.

1. Найдите длину гоночной дистанции, если, по данным Лосяша, Крош догнал Бараша через 21 мин после старта?
2. Через какое время после старта Бараш догнал Кроша, если на финише Бараш опередил соперника на 6 с?

Считать, что Крош и Бараш стартовали одновременно, двигались всё время в одном направлении, и никто из них с тропинки не съезжал.

Ответ: 1) 12,6 км. 2) 34 мин.

Решение: Пусть s — длина всей дистанции, $v_Б$ — скорость Бараша, $v_{К1}$, $v_{К2}$, $v_{К3}$ — скорости Кроша на первом, втором и третьем участке. Рассмотрим сначала первый вопрос задачи. Путь, пройденный гонщиками до момента первого обгона, равен $s_н = v_Б \cdot 21$ мин $= 7{,}35$ км. Из этих 7,35 км отрезок пути, равный $s/3$, Крош ехал со скоростью $v_{К1} = 18$ км/ч, а оставшийся участок — со скоростью $v_{К2} = 27$ км/ч. Поэтому

$$\frac{s/3}{v_{К1}} + \frac{7{,}35\text{ км} - s/3}{v_{К2}} = 21\text{ мин} \quad\Rightarrow\quad s = 12{,}6\text{ км}.$$

Для ответа на второй вопрос рассмотрим финишный отрезок пути (после обгона Кроша Барашем). Пусть он имеет длину $s_ф$. Бараш на нём ехал со скоростью $v_Б$, а Крош — со скоростью $v_{К3} = 20$ км/ч. Так как Бараш финишировал на 6 секунд раньше, можно записать, что

$$\frac{s_ф}{v_{К3}} - \frac{s_ф}{v_Б} = 6\text{ с} \quad \Rightarrow \quad s_ф = 0{,}7\text{ км}.$$

Всю дистанцию Бараш проехал за время $t = s/v_Б = 36$ мин, а финишный отрезок — за время $t_ф = s_ф/v_Б = 2$ мин. Отсюда находим, что Бараш догнал Кроша через 36 мин − 2 мин = 34 мин после старта.

Критерии:

Найден путь, пройденный до первого обгона . . . . 1 балл
Составлено уравнение для нахождения длины дистанции . . . . 2 балла
Найдена длина дистанции . . . . 2 балла
Найдено время прохождения дистанции Барашем . . . . 1 балл
Найден путь, пройденный от второго обгона до финиша . . . . 2 балла
Найдено время второго обгона . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Средняя скорость велосипедиста.
Автомобиль первую часть пути проехал со скоростью втрое большей, чем вторую, а третью, последнюю часть пути — со скоростью вдвое меньшей, чем первую. С какими скоростями перемещался автомобиль на первом, втором и третьем участках, если на преодоление первого и третьего участков он затратил одно и то же время, равное половине времени на втором участке, а его средняя скорость на всём пути составила 19,5 м/с?

Ответ: $\upsilon_1 = 36$ м/с, $\upsilon_2 = 12$ м/с, $\upsilon_3 = 18$ м/с.

Решение: Пусть υ_2 — скорость автомобиля на втором участке, тогда на первом участке его скорость равна $\upsilon_1 = 3\upsilon_2$, а на третьем — $\upsilon_3 = 3\upsilon_2/2$. Обозначим за t_1 время автомобиля на первом (и третьем) участке, тогда второй участок он проехал за время $2t_1$. Весь путь, пройденный автомобилем, составляет

$$s = \upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 \cdot 2t_1 + \upsilon_3 t_1 = 3\upsilon_2 t_1 + 2\upsilon_2 t_1 + \frac{3}{2}\upsilon_2 t_1 = \frac{13}{2}\upsilon_2 t_1,$$

а общее время равно $t = t_1 + 2t_1 + t_1 = 4t_1$. С другой стороны, $s = \upsilon_{\text{сред}} t$. Отсюда получаем

$$\frac{13}{2}\upsilon_2 t_1 = \upsilon_{\text{сред}} \cdot 4t_1 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{8\upsilon_{\text{сред}}}{13} = 12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

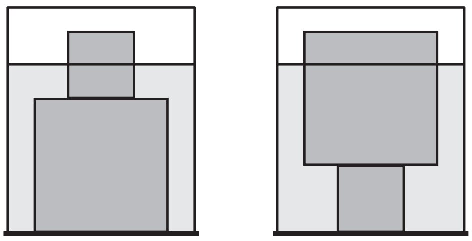
Скорости на первом и третьем участках, соответственно, равны

$$\upsilon_1 = 3\upsilon_2 = 36\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \upsilon_3 = 1{,}5\upsilon_2 = 18\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерии:

Скорости на всех участках выражены через одну из них . . . . 1 балл
Время на всех участках выражено через одно из них . . . . 1 балл
Записана связь между s, t и $\upsilon_{\text{сред}}$ . . . . 1 балл
Найден весь путь, пройденный автомобилем . . . . 2 балла
Записано уравнение для искомой скорости . . . . 3 балла
Найдены скорости на всех участках . . . . 2 балла

Задача 8.2. Кубики в сосуде.
В цилиндрический сосуд помещают два лежащих друг на друге кубика (маленький на большом), сделанных из одинакового материала. Маленький кубик является сплошным, в то время как большой кубик, имеющий ребро вдвое большей длины, имеет внутри полость. В сосуд медленно наливают масло. Когда уровень масла достигает середины маленького кубика (см. рис. 8.1а), нижний кубик отрывается от дна. Если же опыт повторить в случае, когда кубики переставлены местами, то, как только масло достигнет того же самого уровня (см. рис. 8.1б), верхний кубик оторвётся от нижнего.



а б

Рис. 8.1.

1. Какова плотность материала, из которого сделаны кубики, если плотность масла равна 900 кг/м^3?
2. Какую долю объёма большого кубика занимает полость?

Ответ: 1) 2850 кг/м^3. 2) 15/19.

Решение: Пусть m_1 и m_2 — массы маленького и большого кубиков, а ρ — плотность материала, из которого они сделаны. Обозначим a длину ребра маленького кубика, тогда длина ребра большого кубика равна $2a$. Объём маленького кубика равен $V_1 = a^3$, большого — $V_2 = 8a^3$. По условию задачи высота слоя масла в сосуде в обоих случаях одинаковая и равна $2{,}5a$. Из этого следует, что во втором случае (рис. 8.1б) большой кубик погружен в масло на глубину $1{,}5a$, то есть на 2/3 своего объёма. Запишем условие плавания для большого кубика в этом случае и определим из него m_2:

$$m_2 g = \rho_{\text{м}} g \cdot \frac{2}{3} V_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{16}{3}\rho_{\text{м}} a^3.$$

Запишем теперь условие плавания в первом случае и найдём отсюда ρ:

$$(m_1 + m_2)g = \rho_{\text{м}} g \left(V_2 + \frac{V_1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho a^3 + \frac{16}{3}\rho_{\text{м}} a^3 = \rho_{\text{м}} \left(8a^3 + \frac{a^3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{19}{6}\rho_{\text{м}} = 2850\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Объём стенок большого кубика равен

$$V_{\text{стен}} = \frac{m_2}{\rho} = \frac{4}{19}V_2,$$

следовательно, объём полости составляет $15/19 \approx 79\%$ объёма большого кубика.

Критерии:

Определён объём погруженной части большого кубика во втором случае . . . . 1 балл
Записано условие плавания во втором случае . . . . 2 балла
Найдено выражение для массы большого кубика . . . . 1 балл
Записано условие плавания в первом случае . . . . 2 балла
Найдена плотность материала кубиков . . . . 1 балл
Найдена доля объёма большого кубика, занятого полостью . . . . 3 балла

Задача 8.3. Чебурашка помогает Гене.

Как-то осенним днём Крокодил Гена купил в магазине два одинаковых по массе пакета апельсинов и понёс их домой. Чебурашка, в качестве моральной поддержки, шёл рядом с Крокодилом. Внезапно один из пакетов не выдержал и порвался, а апельсины упали в лужу. Чтобы помочь Гене донести последний оставшийся пакет, Чебурашка сел Крокодилу на плечи и взял покупку в свои руки. Чему равнялась масса одного пакета апельсинов, если масса Чебурашки равна M, а масса Гены — $47M$? Известно, что суммарное давление Гены и Чебурашки на землю (вместе с покупками) в конце путешествия стало в 1,2 раза меньше их суммарного давления при выходе из магазина. Общая площадь ступней Гены в 10 раз больше общей площади ступней Чебурашки.

Ответ: $3M/4$.

Решение: Пусть площадь ступней Гены равна S, тогда площадь ступней Чебурашки будет равна $S/10$. Обозначим m массу одного пакета апельсинов. Суммарное давление Гены и Чебурашки при выходе из магазина равно

$$p_1 = \frac{Mg}{S/10} + \frac{(47M + 2m)g}{S} = \frac{(57M + 2m)g}{S},$$

а в конце путешествия —

$$p_2 = \frac{(47M + M + m)g}{S} = \frac{(48M + m)g}{S}.$$

По условию задачи $p_1 = 1{,}2p_2$. Подставляя сюда выражения для давлений, получаем

$$\frac{(57M + 2m)g}{S} = \frac{1{,}2(48M + m)g}{S} \quad \Rightarrow \quad 57M + 2m = 57{,}6M + 1{,}2m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3M}{4}.$$

Критерии:

Записано выражение для давления в первом случае . . . . 3 балла
Записано выражение для давления во втором случае . . . . 3 балла
Найдена масса пакета апельсинов . . . . 4 балла

Задача 8.4. Эксперименты с линейкой.

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, мальчик Паша решил определить массу пустого медицинского шприца (без иглы) ёмкостью 20 мл. Для этого он взял линейку длиной 50 см и подвесил к её концу шприц, наполовину наполненный водой. Получившуюся систему Паша подвесил на нити. Оказалось, что система находится в равновесии, если точка подвеса линейки располагается на расстоянии 36 см от одного из её краёв. Выяснив это, Паша повторил опыт, но со шприцем, заполненным водой полностью. В этом случае система находится в равновесии, когда точка подвеса линейки расположена на расстоянии 38 см от того же края.
1. Определите массу пустого шприца.
2. Под конец Паша решил определить ещё и плотность неизвестной жидкости. Для этого он провёл третий опыт, но со шприцем, полностью заполненным этой жидкостью. Найдите плотность неизвестной жидкости, если в этом случае точка подвеса оказалась на расстоянии 38,5 см от края линейки.
Линейку считать однородной, массой нитей пренебречь. Плотность воды равна 1000 кг/м^3.

Ответ: 1) 16,4 г. 2) 1,15 г/см^3.

Решение: Обозначим M массу линейки, а m — массу пустого шприца. Тогда масса шприца, заполненного наполовину, равна $m + 10$ г, а заполненного полностью — $m + 20$ г. Так как линейка однородна, её центр тяжести находится в середине, то есть на расстоянии 25 см от краёв. Запишем правило моментов для первых двух случаев:

1. $Mg(36\text{ см} - 25\text{ см}) = (m + 10\text{ г})g(50\text{ см} - 36\text{ см}) \quad \Rightarrow \quad 11M = 14(m + 10\text{ г}),$

2. $Mg(38\text{ см} - 25\text{ см}) = (m + 20\text{ г})g(50\text{ см} - 38\text{ см}) \quad \Rightarrow \quad 13M = 12(m + 20\text{ г}).$

Исключив из полученных равенств массу линейки, получим

$$\frac{11}{13} = \frac{14(m + 10\text{ г})}{12(m + 20\text{ г})} \quad \Rightarrow \quad m = 16{,}4\text{ г}.$$

Масса линейки тогда равна

$$M = \frac{14(m + 10\text{ г})}{11} = 33{,}6\text{ г}.$$

Рассмотрим теперь третий случай. Пусть масса жидкости в шприце равна $m_ж$. Запишем правило моментов для третьего случая:

$$Mg(38{,}5\text{ см} - 25\text{ см}) = (m + m_ж)g(50\text{ см} - 38{,}5\text{ см}) \quad \Rightarrow \quad 13{,}5M = 11{,}5(m + m_ж).$$

Отсюда получим, что

$$m_ж = \frac{27M}{23} - m \approx 23\text{ г} \quad \Rightarrow \quad \rho_ж = \frac{m_ж}{20\text{ мл}} \approx 1{,}15\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Критерии:

Записано правило моментов для первого случая . . . . 2 балла
Записано правило моментов для второго случая . . . . 2 балла
Найдена масса шприца . . . . 2 балла
Записано правило моментов для третьего случая . . . . 2 балла
Найдена плотность неизвестной жидкости . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Эксперименты в спортзале.

Девятиклассники Петя и Вася, будучи в спортзале, решили провести эксперимент. Петя подбросил вертикально вверх теннисный мяч, а Вася включил секундомер. В результате оказалось, что мяч побывал в одной и той же точке на высоте 4 м от пола два раза подряд (сначала двигаясь вверх, затем вниз) с разницей в одну секунду. Какова могла быть начальная скорость мяча, если Петя подбросил его с высоты в 1 м от пола? Высота спортзала, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равна 7 м, а удары мяча можно считать абсолютно упругими. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 9,2 м/с или 11,5 м/с.

Решение: Пусть v_0 — искомая начальная скорость мяча, а v — его скорость на высоте 4 м от пола. Так как мяч оказывается на этой же высоте через 1 секунду, то время его подъёма и время спуска равны по 0,5 с. Рассмотрим два случая: 1) мяч не долетает до потолка спортзала и 2) мяч ударился в потолок.

1) В первом случае скорость мяча в точке максимального подъёма равна нулю, поэтому $v = g \cdot 0{,}5\text{ с} = 5$ м/с. Эта точка находится на высоте $H = 4\text{ м} + g(0{,}5\text{ с})^2/2 = 5{,}25\text{ м} < 7$ м, следовательно, противоречия нет. Начальная скорость мяча в первом случае составит

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g \cdot 3\text{ м}} = \sqrt{85}\text{ м/с} \approx 9{,}2\text{ м/с}.$$

2) Во втором случае скорость мяча в точке максимального подъёма не равна нулю. Тем не менее, мы знаем, что путь, пройденный мячом за 0,5 с до потолка, равен 7 м − 4 м = 3 м. Поэтому

$$3\text{ м} = v \cdot 0{,}5\text{ с} - \frac{g(0{,}5\text{ с})^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = 8{,}5\text{ м/с}.$$

Начальная скорость мяча во втором случае составит

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2g \cdot 3\text{ м}} = 11{,}5\text{ м/с}.$$

Критерии:

Указано, что есть два случая: 1) мяч не ударяется в потолок и 2) мяч ударяется в него . . . . 2 балла
Найдена начальная скорость в первом случае . . . . 3 балла
Найдена скорость мяча на высоте 4 м во втором случае . . . . 3 балла
Найдена начальная скорость во втором случае . . . . 2 балла

Задача 9.2. Схема с мультиметром.

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, мальчик Паша взял 6 одинаковых резисторов и спаял схему, изображённую на рис. 9.1. К точкам A и B приложено постоянное, но неизвестное напряжение, а к точкам C и D Паша подсоединил выводы мультиметра. Чему равно сопротивление одного резистора в данной схеме, если в режиме амперметра мультиметр показывает 120 мА, а в вольтметра — 2,7 В? Мультиметр в обоих режимах можно рассматривать как соответствующие идеальные приборы.

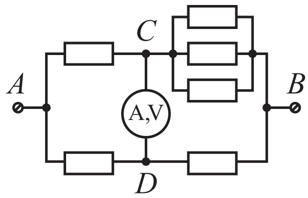


Рис. 9.1.

Ответ: 30 Ом.

Решение: Обозначим U_0 напряжение между точками A и B, а R — сопротивление одного резистора. Рассмотрим первый случай, когда между точками C и D включен идеальный амперметр. Участки AC и CB, AD и DB соединены параллельно, поэтому общее сопротивление всей цепи равно $R/2 + R/4 = 3R/4$, а общий ток — $I_0 = 4U_0/(3R)$. Так как все резисторы в цепи одинаковы, то ток при параллельном соединении делится между ними поровну: $I_{AC} = I_{AD} = I_0/2$ и $I_{CB} = 3I_0/4$, $I_{DB} = I_0/4$. Отсюда следует, что ток, текущий через амперметр, равен $I_A = I_{CB} - I_{AC} = I_0/4 = U_0/(3R)$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда между точками C и D включен идеальный вольтметр. В этом случае сопротивление верхней части цепи равно $R + R/3 = 4R/3$, нижней — $2R$. Ток, текущий в верхней части, равен $I_\text{в} = 3U_0/(4R)$, напряжение на участке AC составляет $U_{AC} = I_\text{в} R = 3U_0/4$. Напряжение на участке AD равно

$U_{AD} = U_0/2$. Вольтметр между точками CD показывает их разность $U_V = U_{AC} - U_{AD} = U_0/4$. Сопоставляя полученные результаты для двух случаев, находим, что

$$I_A = \frac{4U_V}{3R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{4U_V}{3I_A} = \frac{4 \cdot 2{,}7\ \text{В}}{3 \cdot 0{,}12\ \text{А}} = 30\ \text{Ом}.$$

Критерии:

Найдено общее сопротивление цепи с амперметром . . . . 1 балл
Найден общий ток в цепи с амперметром . . . . 1 балл
Найдена связь между током через амперметр, общим напряжением и R . . . . 2 балла
Найдены токи в цепи с вольтметром . . . . 2 балла
Найдена связь между напряжением на вольтметре и общим напряжением . . . . 2 балла
Найдено сопротивление одного резистора . . . . 2 балла

Задача 9.3. Плавление кубика льда.

Экспериментатор Иннокентий Иванов решил изучить у себя в лаборатории процесс плавления льда. Для этого он взял пустой цилиндрический теплоизолированный сосуд со встроенным в дно нагревателем и положил туда кубик льда с длиной ребра, равной 4 см, при температуре 0 ℃. Включив нагреватель, учёный начал наблюдать за происходящим через прозрачную крышку сосуда. Через минуту после включения нагревателя учёный заметил, что лёд всплыл. Определите мощность нагревателя, который использовал экспериментатор. Считать, что лёд плавится только в месте своего контакта с дном сосуда. Площадь дна сосуда равна 40 см^2, плотность льда — 900 кг/м^3, удельная теплота плавления льда — 340 кДж/кг.

Ответ: 196 Вт.

Решение: Обозначим a длину ребра кубика льда, а S площадь дна сосуда. Пусть за 1 мин нагревания кубик уменьшился по высоте на x. Тогда масса расплавившегося льда равна $m_л = \rho_л a^2 x$. Высота слоя воды в сосуде составит

$$h = \frac{m_л}{\rho_в(S - a^2)} = \frac{\rho_л a^2 x}{\rho_в(S - a^2)}.$$

Так как лёд всплыл, запишем условие плавания:

$$\rho_л g a^2 (a - x) = \rho_в g a^2 h \quad \Rightarrow \quad \rho_л(a - x) = \rho_в \cdot \frac{\rho_л a^2 x}{\rho_в(S - a^2)} \quad \Rightarrow \quad a - x = \frac{a^2 x}{S - a^2}.$$

Подставляя данные из условия задачи, $S = 40$ см^2, $a = 4$ см, получаем

$$x = \frac{(S - a^2)a}{S} = 2{,}4\ \text{см}.$$

Рассчитаем теперь мощность нагревателя:

$$P = \frac{\lambda m_л}{60\ \text{с}} = \frac{\lambda \rho_л a^2 x}{60\ \text{с}} = \frac{340000\ \text{Дж/кг} \cdot 900\ \text{кг/м}^3 \cdot 16\ \text{см}^2 \cdot 2{,}4\ \text{см}}{60\ \text{с}} = 195{,}84\ \text{Вт} \approx 196\ \text{Вт}.$$

Критерии:

Записано выражение для высоты слоя воды в сосуде . . . . 2 балла
Записано условие плавания льда в сосуде . . . . 3 балла
Найдено количество растаявшего льда (величина x или аналог) . . . . 2 балла
Найдена мощность нагревателя . . . . 3 балла

Задача 9.4. Подъём груза.

С помощью системы из 5 блоков (см. рис. 9.2) рабочий поднимает плиту массой $M = 100$ кг. С какой минимальной силой F он должен для этого тянуть за свободный конец верёвки, если масса каждого блока равна $m = 15$ кг? Трение в системе отсутствует, массой верёвок и подвесов можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

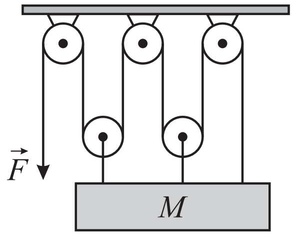


Рис. 9.2.

Ответ: 260 Н.

Решение: Так как блоки имеют массу, итоговая масса груза, которую рабочий должен поднять, равна $M + 2m = 130$ кг. Рассматриваемая система из блоков даёт выигрыш в силе в 5 раз. Это можно доказать двумя способами:

1) Используем «золотое правило» механики. Груз подвешен на 5 верёвках. Если плита вместе с подвижными блоками поднимется на некоторую высоту h, длина всех верёвок сократится на h, и, следовательно, рабочий вытянет верёвку длины $5h$. Проигрыш в расстоянии в 5 раз компенсируется выигрышем в силе в 5 раз.

2) Рабочий действует на верёвку с силой F. Так как верёвка невесома, сила её натяжения равна F по всей длине. В результате на систему, состоящую из плиты и подвижных блоков, действует со стороны верёвки сила $5F$.

Используя этот факт, получаем

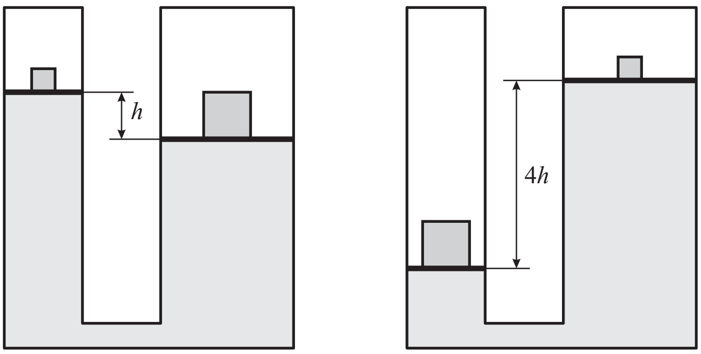
$$F = \frac{(M + 2m)g}{5} = 260 \text{ Н}.$$

Критерии:

Найдена общая масса груза . . . . 2 балла
Указано, что выигрыш в силе равен 5 . . . . 2 балла
Доказательство (любым из способов) . . . . 4 балла
Найдено значение силы F . . . . 2 балла

Задача 9.5. Взвешивание в сообщающихся сосудах.

В цилиндрических сообщающихся сосудах площадь сечения правого колена в три раза больше площади сечения левого, а поверхность жидкости полностью закрыта поршнями. В лаборатории экспериментатора Иннокентия Иванова есть два сплошных кубика, сделанные из сплавов с различной плотностью, причём длина ребра одного кубика в два раза меньше длины ребра второго. Когда на левый поршень положили маленький кубик, а на правый — большой, разность уровней жидкости в сосудах оказалась равна h (см. рис. 9.3а). Когда же на левый поршень положили большой кубик, а на правый — маленький, разность уровней в сосудах стала равна $4h$ (см. рис. 9.3б). Чему равна плотность сплава, из которого сделан большой кубик, если плотность материала маленького кубика равна 5,6 г/см^3? Массой поршней пренебречь, трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует.



а б

Рис. 9.3.

Ответ: 7,7 г/см^3.

Решение: Пусть m — масса маленького кубика, M — масса большого, а S — площадь сечения левого колена. Рассмотрим первый случай (рис. 9.3а). Давления левого и правого поршней на поверхность жидкости равны $p_л = mg/S$ и $p_п = Mg/(3S)$ соответственно. Разность между $p_п$ и $p_л$ равна давлению столба жидкости высотой h, то есть

$$p_п - p_л = \rho gh \quad \Rightarrow \quad M - 3m = 3\rho Sh,$$

где ρ — плотность жидкости в сообщающихся сосудах.

Во втором случае (рис. 9.3б) давления левого и правого поршней на поверхность жидкости равны $p'_л = Mg/S$ и $p'_п = mg/(3S)$. Разность между ними в этом случае равна

$$p'_л - p'_п = \rho g \cdot 4h \quad \Rightarrow \quad 3M - m = 12\rho Sh.$$

Отсюда находим связь между массами кубиков

$$\frac{3M - m}{M - 3m} = 4 \quad \Rightarrow \quad M = 11m.$$

Так как длина ребра большого кубика в 2 раза больше длины ребра маленького, объём большого кубика в 8 раз больше объёма маленького: $V_2 = 8V_1$. Это значит, что плотности кубиков связаны соотношением

$$\frac{M}{V_2} = \frac{11}{8} \cdot \frac{m}{V_1} \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \frac{11\rho}{8},$$

откуда $\rho_2 = 11/8 \cdot 5{,}6$ г/см^3 $= 7{,}7$ г/см^3.

Критерии:

Найдены давления поршней в первом случае . . . . 1 балл
Записано условие равенства давлений в первом случае . . . . 2 балла
Найдены давления поршней во втором случае . . . . 1 балл
Записано условие равенства давлений во втором случае . . . . 2 балла
Найдена связь между массами кубиков . . . . 2 балла
Найдена плотность большого кубика . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Учебные стрельбы.

Во время военных учений миномётный расчёт произвёл выстрел из своего орудия, расположенного в точке A. Снаряд, вылетевший из ствола под углом 45° к горизонту, упал в точке B и взорвался. Генерал, наблюдавший за ходом учений из точки C, услышал сначала звук выстрела, а ещё через 15 с — звук взрыва. Чему равнялась начальная скорость снаряда и дальность его полёта AB, если $BC = 1485$ м, $AC = 2{,}31$ км, а скорость звука равна 330 м/с. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Полигон, на котором проходили учения, можно считать горизонтальной плоскостью. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v_0 \approx 124$ м/с; $AB \approx 1530$ м.

Решение: Время прихода звук из точки A в точку C составляет $t_{AC} = AC/330$ м/с $= 7$ с, из точки B в точку C — $t_{BC} = BC/330$ м/с $= 4{,}5$ с. Пусть t — время полёта снаряда, тогда из условия задачи следует, что

$$t + t_{BC} - t_{AC} = 15\text{ с} \quad \Rightarrow \quad t = 17{,}5\text{ с}.$$

Теперь, используя формулу для времени и дальности полёта, мы можем найти начальную скорость снаряда и расстояние AB:

$$t = \frac{2v_0 \sin 45^\circ}{g} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{gt}{\sqrt{2}} \approx 124\text{ м/с},$$

$$AB = \frac{2v_0^2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ}{g} = \frac{v_0^2}{g} \approx 1530\text{ м}.$$

Критерии:

Найдены t_{AC} и t_{BC} . . . . 1 балл
Найдено время полёта снаряда . . . . 3 балла
Найдена начальная скорость снаряда . . . . 3 балла
Найдена дальность полёта снаряда . . . . 3 балла

Задача 10.2. Плавание куба.

Сплошной куб с ребром длиной $3a$ будет плавать в масле, погружаясь на половину своего объёма, если снизу к нему прикрепить груз размером $3a \times 3a \times a$ с массой, в 2 раза большей массы куба (см. рис. 10.1).
1. Какова плотность материала, из которого сделан куб?
2. Какое минимальное количество таких грузов нужно прикрепить снизу к кубу, чтобы вся система утонула?
Плотность масла равна 900 кг/м^3, объёмом и массой креплений можно пренебречь.

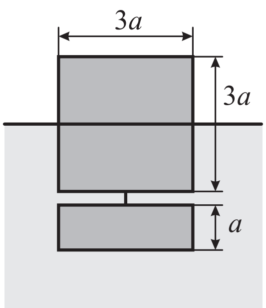


Рис. 10.1.

Ответ: 1) $\rho = 250$ кг/м^3. 2) 4 груза.

Решение: Пусть m — масса большого куба, тогда $2m$ — масса одного груза. Запишем условие плавания для системы, состоящей из куба, погруженного наполовину, и одного груза:

$$3mg = \rho_{\text{м}} g \left(\frac{27a^3}{2} + 9a^3\right) \quad \Rightarrow \quad 3m = \rho_{\text{м}} \cdot \frac{45a^3}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{15\rho_{\text{м}} a^3}{2}.$$

Плотность куба ρ равна

$$\rho = \frac{m}{27a^3} = \frac{5\rho_{\text{м}}}{18} = 250\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, рассмотрим систему из куба, погруженного полностью, и N грузов. Для того чтобы найти минимальное N, запишем условие плавания этой системы:

$$(m + N \cdot 2m)g = \rho_{\text{м}} g \left(27a^3 + N \cdot 9a^3\right) \quad \Rightarrow \quad m(2N + 1) = 9\rho_{\text{м}} a^3 (N + 3).$$

Подставляя сюда выражение для массы куба, получим

$$\frac{15\rho_{\text{м}} a^3}{2}(2N + 1) = 9\rho_{\text{м}} a^3 (N + 3) \quad \Rightarrow \quad 15(2N + 1) = 18(N + 3) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{13}{4} = 3{,}25.$$

Это значит, что минимальное количество грузов, которое необходимо прикрепить к кубу, чтобы утопить его, равно $N = 4$.

Критерии:

Записано условие плавания для куба и одного груза . . . . 2 балла
Найдена плотность куба . . . . 2 балла
Записано условие плавания для куба и N грузов . . . . 3 балла
Получено, что $N = 3{,}25$ . . . . 2 балла
Получен окончательный ответ $N = 4$ . . . . 1 балл

Задача 10.3. «Круглая» схема.

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, мальчик Паша спаял из кусочков тонкой проволоки постоянного сечения фигуру в виде окружности с двумя соединёнными в центре взаимно перпендикулярными перемычками CD и EF, лежащими на диаметрах этой окружности (см. рис. 10.2). Какое сопротивление покажет омметр, подключенный к точкам A и B, если при подключении к точкам C и D он показывает сопротивление, равное 8 Ом. Точка A лежит на середине дуги CE, а точка B — на середине дуги DF.

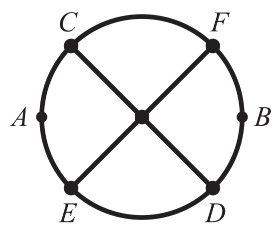


Рис. 10.2.

Ответ: $(\pi + 8)$ Ом $\approx$ 11 Ом.

Рис. 10.3.

Решение: Пусть R — сопротивление куска проволоки длиной, равной радиусу окружности. Для остальных кусков их сопротивление будет пропорционально их длине. Рассчитаем сопротивление схемы между точками C и D. Данная цепь симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через её центр. Поэтому ток в проводниках, лежащих на оси симметрии, не течёт, их можно убрать (рис. 10.3а). Оставшаяся цепь представляет собой параллельное соединение трёх резисторов: двух полуокружностей (сопротивлением πR каждая) и диаметра (сопротивлением $2R$). Сопротивление между точками C и D равно

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{2}{\pi R} + \frac{1}{2R} \quad \Rightarrow \quad R_{CD} = \frac{2\pi R}{\pi + 4}.$$

Рассчитаем теперь сопротивление схемы между точками A и B. Данная цепь тоже симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через её центр. Поэтому ток из верхней части цепи не перетекает в её нижнюю часть, и цепь в точке пересечения диагоналей можно разорвать так, как показано на рис. 10.3б. Сопротивление между точками A и B равно

$$R_{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi R}{4} + \frac{\pi R/2 \cdot 2R}{\pi R/2 + 2R} + \frac{\pi R}{4}\right) = R\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{\pi + 4}\right) = \frac{\pi R(\pi + 8)}{4(\pi + 4)}.$$

Отношение R_{AB}/R_{CD} составляет

$$\frac{R_{AB}}{R_{CD}} = \frac{\pi + 8}{8}.$$

Так как $R_{CD} = 8$ Ом, сопротивление между точками A и B равно $R_{AB} = (\pi + 8)$ Ом ≈ 11 Ом.

Критерии:

Использовано, что сопротивление проводников пропорционально их длине . . . . 1 балл
Нарисована правильная эквивалентная схема для R_{CD} (рис. 10.3а) . . . . 2 балла
Найдено сопротивление R_{CD} . . . . 2 балла
Нарисована правильная эквивалентная схема для R_{AB} (рис. 10.3б) . . . . 2 балла
Найдено сопротивление R_{AB} . . . . 2 балла
Найдено значение R_{AB} . . . . 1 балл

Задача 10.4. По наклонной …

К прямоугольному бруску массой m, находящемуся на наклонной плоскости с углом наклона α ($\sin\alpha = 3/5$), прикреплена лёгкая нерастяжимая нить, перекинутая через блок. К свободному концу нити привязали груз массой $2m$ (рис. 10.4). С каким ускорением будет двигаться брусок, и чему будет равна сила натяжения нити? Коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью равен $\mu = 0{,}25$. Блок считать невесомым, трения в оси блока нет.

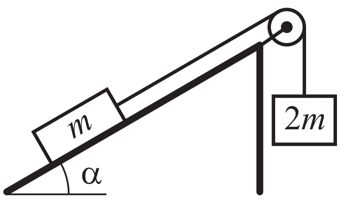


Рис. 10.4.

Ответ: $a = 2g/5$, $T = 6mg/5$.

а б

Рис. 10.5.

Решение: Пусть a — ускорение системы, T — натяжение нити. Изобразим силы, действующие на груз массой $2m$ (рис. 10.5а). Запишем 2-й закон Ньютона для этого тела:

$$2ma = 2mg - T.$$

Изобразим теперь силы, действующие на груз массой m (рис. 10.5б). Выберем оси координат вдоль и поперёк наклонной плоскости и запишем 2-й Ньютона для проекций на эти оси:

$$ma = T - F_{тр} - mg\sin\alpha, \quad 0 = N - mg\cos\alpha.$$

Так как груз массы m скользит по наклонной плоскости, $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Чтобы найти ускорение a, исключим T из уравнений движения и учтём, что $\sin\alpha = 3/5$, а $\cos\alpha = 4/5$:

$$3ma = 2mg - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad a = \frac{2g}{3} - \frac{g\sin\alpha}{3} - \frac{\mu g\cos\alpha}{3} = \frac{2g}{3} - \frac{g}{5} - \frac{g}{15} = \frac{2g}{5}.$$

Сила натяжения нити равна

$$T = 2m(g-a) = \frac{6mg}{5}.$$

Критерии:

Записан 2-й закон Ньютона для тела массы $2m$ . . . . 2 балла
Записан 2-й закон Ньютона для тела массы m . . . . 2 балла
Записано выражение для силы трения . . . . 1 балл
Найдено ускорение системы . . . . 3 балла
Найдена сила натяжения . . . . 2 балла

Задача 10.5. Падение шаров.

Массивное тело, падающее вниз с большой высоты, из-за сопротивления воздуха большую часть пути будет двигаться с постоянной, установившейся скоростью. Для сплошного алюминиевого шара диаметром $d_1 = 10$ см установившаяся скорость падения составляет $v_1 = 87$ м/с, а для полого стального шара диаметром $d_2 = 20$ см эта скорость равна $v_2 = 145$ м/с. Чему равна толщина стенок стального шара? Толщина стенок всюду одинакова. Плотность алюминия равна 2700 кг/м^3, плотность стали — 7800 кг/м^3.

Примечание: Сила сопротивления воздуха, действующая на любой шар диаметром d, движущийся со скоростью v, пропорциональна произведению d^2v^2. Объём шара диаметра d равен $\pi d^3/6$.

Ответ: 2 см.

Решение: При установившемся движении сила тяжести, действующая на шар, уравновешивается силой сопротивления воздуха $F_{сопр} = kd^2v^2$, где k — некоторый коэффициент. Масса сплошного алюминиевого шара равна $m_1 = \rho_{ал}\pi d_1^3/6$, поэтому условие равенства сил будет иметь вид

$$m_1 g = kd_1^2v_1^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\rho_{ал}\pi d_1^3 g}{6} = kd_1^2v_1^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\rho_{ал}\pi d_1 g}{6} = kv_1^2.$$

Так как толщина стенок полого стального шара везде одинакова, полость тоже имеет форму шара диаметром $d_п$. Масса такого шара равна $m_2 = \rho_{ст}\pi(d_2^3 - d_п^3)/6$, поэтому условие равенства сил будет иметь вид

$$m_2 g = kd_2^2v_2^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\rho_{ст}\pi(d_2^3 - d_п^3)g}{6} = kd_2^2v_2^2.$$

Поделим полученные соотношения друг на друга и выразим $d_п$:

$$\frac{\rho_{ст}(d_2^3 - d_п^3)}{\rho_{ал}d_1} = \frac{d_2^2v_2^2}{v_1^2} \quad\Rightarrow\quad d_п^3 = d_2^3\left(1 - \frac{\rho_{ал}d_1v_2^2}{\rho_{ст}d_2v_1^2}\right) \quad\Rightarrow\quad d_п = d_2\sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{ал}d_1v_2^2}{\rho_{ст}d_2v_1^2}} \approx 16\text{ см}.$$

Толщина стенок шара равна (20 см − 16 см)/2 = 2 см.

Критерии:

Записано выражение для массы алюминиевого шара . . . . 1 балл
Записано выражение для массы стального шара . . . . 2 балла
Записано условие равенства сил для алюминиевого шара . . . . 1 балл
Записано условие равенства сил для стального шара . . . . 2 балла
Найден диаметр полости в стальном шаре . . . . 3 балла
Найдена толщина стенок стального шара . . . . 1 балл

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Схема с конденсаторами.

На рис. 11.1 изображена электрическая цепь, состоящая из двух конденсаторов, двух резисторов (их характеристики указаны на рисунке), ключа и источника с ЭДС, равной $\mathscr{E}$, и внутренним сопротивлением r. Вначале ключ разомкнут. Какой заряд протечёт через перемычку AB, если ключ замкнуть?

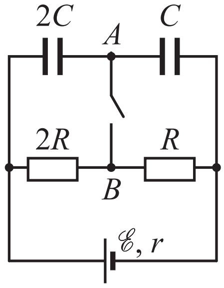


Рис. 11.1.

Ответ: $3\mathscr{E}CR/(r+3R)$.

Решение: Вначале ключ разомкнут. Заряды на обкладках конденсаторов, обращённых к точке A, равны по величине и противоположны по знаку, следовательно их сумма равна нулю.

Пусть теперь ключ замкнут. Найдём установившиеся заряды на обоих конденсаторах. По закону Ома для полной цепи ток через резисторы равен $I = \mathscr{E}/(r+3R)$. Напряжение на левом резисторе и левом конденсаторе равны $U_1 = I\cdot 2R = 2\mathscr{E}R/(r+3R)$, на правых элементах, соответственно, напряжение составляет $U_2 = IR = \mathscr{E}R/(r+3R)$. Заряды на конденсаторах равны

$$q_{2C} = 2CU_1 = \frac{4\mathscr{E}CR}{r+3R}, \quad q_C = CU_2 = \frac{\mathscr{E}CR}{r+3R}.$$

Суммарный заряды на обкладках конденсаторов, обращённых к точке A, теперь составляет

$$q = -q_{2C} + q_C = -\frac{3\mathscr{E}CR}{r+3R}.$$

Это значит, что через перемычку AB протёк заряд, равный

$$|q| = \frac{3\mathscr{E}CR}{r+3R}.$$

Критерии:

Найден суммарный заряд на обкладках, обращённых к точке A, при разомкнутом ключе . . . . 2 балла
Найден ток через резисторы . . . . 2 балла
Найдены напряжения на конденсаторах при замкнутом ключе . . . . 2 балла
Найдены заряды на конденсаторах при замкнутом ключе . . . . 1 балл
Найден заряд, протекший при замыкании ключа . . . . 3 балла

Задача 11.2. Движение бруска.

К прямоугольному бруску массой m, лежащему на горизонтальном столе, прикреплена лёгкая нерастяжимая нить, перекинутая через блок. К свободному концу нити привязали груз массой m (рис. 11.2а). После того, как систему освободили, брусок начал двигаться с некоторым ускорением. Систему вернули в исходное положение, привязали к нити ещё один груз массой m (рис. 11.2б) и снова отпустили. Каков коэффициент трения между бруском и поверхностью стола, если во втором случае ускорение бруска оказалось на 50% больше, чем в первом? Блок считать невесомым, трения в оси блока нет.

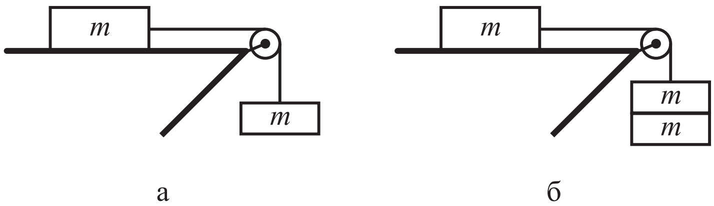


Рис. 11.2.

Ответ: $\mu = 0{,}2$.

Решение: Пусть в первом случае система движется с ускорением a. Запишем 2-й закон Ньютона для бруска и груза:

$$\begin{cases} ma = T_1 - F_{\text{тр}} = T_1 - \mu mg, \\ ma = mg - T_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2ma = mg - \mu mg \quad \Rightarrow \quad 2a = g(1-\mu),$$

где T_1 — сила натяжения нити, μ — искомый коэффициент трения. Во втором случае ускорение системы равно $1{,}5a$. Запишем ещё раз 2-й закон Ньютона для бруска и грузов:

$$\begin{cases} m \cdot 1{,}5a = T_2 - \mu mg, \\ 2m \cdot 1{,}5a = 2mg - T_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4{,}5ma = 2mg - \mu mg \quad \Rightarrow \quad 4{,}5a = g(2 - \mu),$$

где T_2 — новая сила натяжения нити. Исключая из полученных выражений ускорение a, находим

$$\frac{9}{4} = \frac{2 - \mu}{2 - \mu} \quad \Rightarrow \quad \mu = 0{,}2.$$

Критерии:

Записан 2-й закон Ньютона для бруска в первом случае . . . . 1 балл
Записан 2-й закон Ньютона для груза в первом случае . . . . 2 балла
Записан 2-й закон Ньютона для бруска во втором случае . . . . 2 балла
Записан 2-й закон Ньютона для груза во втором случае . . . . 2 балла
Найден коэффициент трения . . . . 3 балла

Задача 11.3. Чувствительность масс-спектрометра. Масс-спектрометр состоит из ионной пушки, испускающей одинаковые положительно заряженные ионы внутрь квадратной камеры, в которой создано однородное магнитное поле (см. рис. 11.3). Отверстие пушки находится в середине одной из сторон камеры, скорость вылетающих частиц постоянна и направлена перпендикулярно этой стороне. Смежная сторона камеры полностью занята детекторами ионов. Спектрометр настроен так, чтобы ионы попадали точно в центр стороны, оборудованной детекторами, при индукции магнитного поля, равной B_0. Найдите максимальное и минимальное значения индукции магнитного поля, B_{max} и B_{min}, при которых ионы ещё будут попадать на детекторы. Магнитное поле внутри камеры направлено перпендикулярно начальной скорости частиц. Диаметром отверстия пушки по сравнению с размером камеры можно пренебречь. Ионы, отскакивающие от стенок камеры, можно не учитывать. Скорость ионов много меньше скорости света.

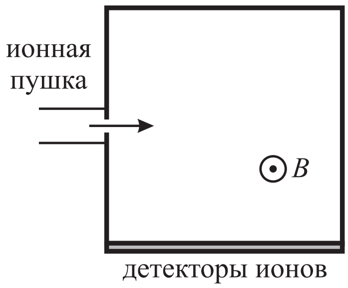


Рис. 11.3.

Ответ: $B_{max} = 2B_0$, $B_{min} = 2B_0/5$.

Решение: Пусть длина стороны камеры равна L. Ион, влетающий в однородное магнитное поле, будет двигаться по дуге окружности. Чтобы определить её радиус, запишем 2-й закон Ньютона для частицы с массой m и зарядом q, движущейся со скоростью v под действием силы Лоренца:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{qB}.$$

Если индукция магнитного поля равна B_0, ион, стартующий из середины одной стороны квадрата, попадает точно в центр смежной стороны. Это значит, что радиус траектории иона равен $L/2$, то есть

$$\frac{L}{2} = \frac{mv}{qB_0} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2mv}{qB_0}.$$

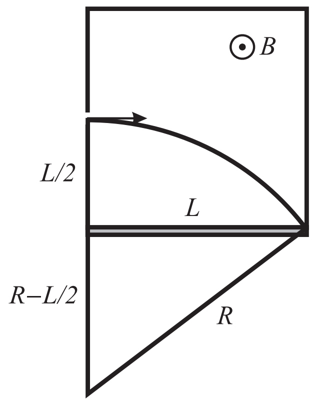


Рис. 11.4.

Определим теперь критические значения индукции магнитного поля, при которых ионы будут попадать в левый (по рисунку) и правый край угол камеры.

Рассмотрим первый случай, соответствующий максимальному значению индукции B_{max}. Ионы могут попасть в левый угол, если радиус траектории будет равен половине расстояния между пушкой и углом, то есть $L/4$. Так как радиус получается вдвое меньший, чем при индукции B_0, индукция магнитного поля должна быть равна $B_{max} = 2B_0$.

Рассмотрим теперь второй случай, соответствующий минимальному значению индукции B_{min} (см. рис. 11.4). Используя теорему Пифагора, находим радиус траектории:

$$\left(R - \frac{L}{2}\right)^2 + L^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{5L}{4}.$$

Отсюда

$$B_{min} = \frac{mv}{qR} = \frac{4mv}{5qL} = \frac{2B_0}{5}.$$

Критерии:

Записана формула для радиуса траектории . . . . 1 балл
Найден радиус траектории для первого случая . . . . 2 балла
Найдено B_{max} . . . . 1 балл
Найден радиус траектории для второго случая . . . . 4 балла
Найдено B_{min} . . . . 2 балла

Задача 11.4. Эксперименты с монетами.

Готовясь к экспериментальному туру олимпиады по физике, мальчик Паша изучал столкновение двух монет с массами m и $2m$, сделанных из одного и того же материала. Паша выяснил, что если движущаяся тяжёлая монета сталкивается с покоящейся лёгкой монетой, то после удара тяжёлая монета проходит до своей остановки расстояние, в 9 раз меньшее, чем лёгкая. Определите, какая часть начальной кинетической энергии системы превращается в тепло **в момент удара** двух монет. Движение монет происходит по горизонтальной, ровной поверхности вдоль одной прямой. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 12%.

Решение: Так как монеты сделаны из одного из того же материала, коэффициент трения между монетами и горизонтальной поверхностью одинаковый. Обозначим его μ, тогда сила трения, действующая на монету массы m, равна $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Если монета после столкновения приобрела скорость v, то до своей остановки она пройдёт путь, равный

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgs \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2}{2\mu g},$$

то есть пройденный путь s пропорционален квадрату начальной скорости. По условию задачи тяжёлая монета после столкновения прошла путь в 9 раз меньший, чем лёгкая, $s_2 = 9s_1$. Это значит, что их скорости после столкновения отличались в 3 раза: $v_2 = 3v_1$.

Пусть скорость тяжёлой монеты до удара равна v_0. По закону сохранения импульса

$$2mv_0 = 2mv_1 + mv_2 \quad \Rightarrow \quad 2mv_0 = 5mv_1 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{5}{2}v_1.$$

Теплоту, выделившуюся при ударе, найдём как разность начальной и конечной кинетических энергий монет:

$$Q = E_{\text{нач}} - E_{\text{кон}} = \frac{2mv_0^2}{2} - \left(\frac{2mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\right).$$

Подставляя сюда выражения для скоростей v_0 и v_2, получим

$$Q = \frac{25mv_1^2}{4} - mv_1^2 - \frac{9mv_1^2}{2} = \frac{3mv_1^2}{4}.$$

Начальная кинетическая энергия монеты равна $E_{\text{нач}} = 25mv_1^2/4$, следовательно

$$\frac{Q}{E_{\text{нач}}} = \frac{3}{25} = 0{,}12.$$

Критерии:

Найдено, что после удара $v_2 = 3v_1$. . . . . 2 балла
Записан закон сохранения импульса . . . . 2 балла
Найдена скорость тяжёлой монеты до столкновения . . . . 1 балл
Найдена кинетическая энергия тяжёлой монеты до столкновения . . . . 1 балл
Найдена теплота, выделившаяся при ударе Q . . . . 3 балла
Найдено значение отношения $Q/E_{\text{нач}}$ . . . . 1 балл

Задача 11.5. Сосуд с подогревом.
Вертикальный цилиндрический теплоизолированный сосуд, заполненный идеальным одноатомным газом, разделён подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные по объёму части (см. рис. 11.5). В верхней части сосуда находится ν молей газа, а в нижней — 2ν молей. Температура газа над поршнем и под ним одинакова и равна T_0. В результате работы нагревательного элемента, расположенного в нижней части сосуда, поршень поднялся, и объём верхней части уменьшился вдвое.
1. Найдите новые температуры газа в верхней и нижней частях сосуда.
2. Найдите количество теплоты, отданное нагревательным элементом.
Считать, что поршень скользит внутри сосуда без трения. Объёмом нагревательного элемента можно пренебречь.
Примечание: Адиабатный процесс описывается уравнением Пуассона: $pV^{5/3} = \text{const}$.

Ответ: 1) $T_в = T_0 \cdot 2^{2/3}$, $T_н = 3T_0/4 \cdot (2^{5/3} + 1)$. 2) $Q = \nu RT_0(3 \cdot 2^{5/3} - 7/4)$.

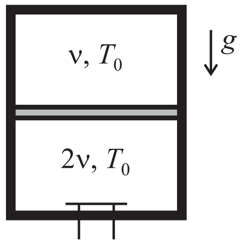


Рис. 11.5.

Решение: Пусть V_0 — объём каждой половины сосуда. Давления газа в верхней и нижней половинах до включения нагревателя равны

$$p_{в1} = \frac{\nu RT_0}{V_0}, \quad p_{н1} = \frac{2\nu RT_0}{V_0}.$$

Разность давлений равна давлению массивного поршня $p_п = p_{н1} - p_{в1} = \nu RT_0/V_0$.

В процессе работы нагревателя объём верхней части сосуда уменьшился вдвое. Верхняя часть является теплоизолированной, поэтому для неё можно использовать уравнение Пуассона. Согласно нему, если объём при адиабатном процессе уменьшается в 2 раза, давление в сосуде увеличивается в $2^{5/3}$ раза, $p_{в2} = 2^{5/3}\nu RT_0/V_0$. Давление в нижней части сосуда будет больше на величину давления поршня:

$$p_{н2} = p_{в2} + p_п = \left(2^{5/3} + 1\right)\frac{\nu RT_0}{V_0}.$$

По закону Менделеева–Клапейрона найдём температуры в обеих частях сосуда:

$$T_в = \frac{p_{в2}V_0/2}{\nu R} = T_0 \cdot 2^{2/3},$$

$$T_н = \frac{p_{н2} \cdot 3V_0/2}{2\nu R} = \frac{3}{4}T_0\left(2^{5/3} + 1\right).$$

Чтобы определить теплоту, отданную нагревателем, запишем первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$. Изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_в - T_0) + \frac{3}{2} \cdot 2\nu R(T_н - T_0) = \nu RT_0\left(3 \cdot 2^{5/3} - \frac{9}{4}\right).$$

Чтобы найти суммарную работу газа в обеих частях сосуда, заметим, что при малом увеличении объёма нижней части сосуда, ΔV, объём верхней части уменьшается на то же ΔV. Работа газа при этом составит

$$\Delta A = p_н\Delta V + (-p_в\Delta V) = (p_н - p_в)\Delta V = p_п\Delta V.$$

Так как давление поршня постоянно, эту формулу можно использовать для любых (не малых) значений ΔV. В нашем случае $\Delta V = V_0/2$, поэтому

$$A = \frac{p_п V_0}{2} = \frac{\nu RT_0}{2}.$$

Отсюда находим, что

$$Q = \Delta U + A = \nu RT_0\left(3 \cdot 2^{5/3} - \frac{9}{4}\right) + \frac{\nu RT_0}{2} = \nu RT_0\left(3 \cdot 2^{5/3} - \frac{7}{4}\right).$$

Критерии:
Найдено давление поршня . . . . 1 балл
Найдена конечная температура верхней части сосуда . . . . 1 балл

Найдена конечная температура нижней части сосуда . . . . 2 балла
Найдено суммарное изменение внутренней энергии газа . . . . 2 балла
Найдена суммарная работа газа . . . . 3 балла
Найдена теплота, переданная газу . . . . 1 балл

Максимально возможный балл в 11 классе 50